Maths XP DM $n°2$ Décembre 2024
À faire par groupe de 2 élèves, une seule copie.

<u>Problème</u> d'après un sujet de bac

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ et on pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 = A + 2I$. En déduire, de même, une expression de A^3 et une expression de A^4 en fonction de A et I.

2. On considère les suites (r_n) et (s_n) définies par $r_0 = 0$ et $s_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} r_{n+1} = r_n + s_n \\ s_{n+1} = 2r_n \end{cases}$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $A^n = r_n A + s_n I$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $d_n = r_n - s_n$. Déterminer la nature de la suite (d_n), en déduire que pour tout entier naturel n : $d_n = (-1)^{n+1}$.

4. Soit (t_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $t_n = r_n + \frac{(-1)^n}{3}$.
Montrer que la suite (t_n) est géométrique, préciser sa raison et son premier terme, en déduire t_n en fonction de n.

5. Déterminer r_n et s_n en fonction de n.

6. Déduire des questions précédentes que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & 2^{n+1} - 2(-1)^n \\ (-1)^n - 2^n & 2^{n+1} - (-1)^n \end{pmatrix}$$

7. Un élève affirme :
« pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme des coefficients de A^n est égale à 2^{n+1} ».
Si cette affirmation est fausse en donner un contre-exemple, sinon la démontrer.

Corrigé thiaude

Problème

$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}}$ **et** $\boldsymbol{I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

1. **Vérifier que $A^2 = A + 2I$. En déduire une expression de A^3 et une expression de A^4 en fonction de A et I.**

On a d'une part :

$$\begin{matrix} & & \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} & \\ A^2 = & \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 16-18 & -24+30 \\ 12-15 & -18+25 \end{pmatrix} & = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Et d'autre part, on a :

$$A + 2I = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+2 & 6+0 \\ -3+0 & 5+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$$

On constate que l'on a bien : $\boldsymbol{A^2 = A + 2I}$.

On a successivement :

$$A^3 = A \times A^2 = A \times (A + 2I) = A^2 + 2A = A + 2I + 2A = 3A + 2I$$
$$A^4 = A \times A^3 = A \times (3A + 2I) = 3A^2 + 2A = 3(A + 2I) + 2A = 5A + 6I$$

Résumons : $\boldsymbol{A^3 = 3A + 2I}$ et $\boldsymbol{A^4 = 5A + 6I}$.

2. $\boldsymbol{r_0 = 0}$ **et** $\boldsymbol{s_0 = 1}$ **et,** $\boldsymbol{\forall n :} \begin{cases} \boldsymbol{r_{n+1} = r_n + s_n} \\ \boldsymbol{s_{n+1} = 2r_n} \end{cases}$

Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $A^n = r_n A + s_n I$.

• initialisation

$r_0 A + s_0 I = 0\,A + 1\,I = I = A^0$ donc P_0 est vraie

• hérédité

Supposons $A^k = r_k A + s_k I$ pour un certain entier naturel k (hypothèse de récurrence) et montrons que $A^{k+1} = r_{k+1} A + s_{k+1} I$.

On a :

$$A^{k+1} = A \times A^k = A(r_k A + s_k I) = r_k A^2 + s_k A = r_k(A + 2I) + s_k A = r_k A + 2r_k I + s_k A$$
$$= (r_k + s_k)A + 2r_k I$$

Or, $r_k + s_k = r_{k+1}$ et $2r_k = s_{k+1}$ donc $A^{k+1} = r_{k+1} A + s_{k+1} I$

Conclusion

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = r_n A + s_n I$.

3. **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $d_n = r_n - s_n$. Déterminer la nature de la suite (d_n), en déduire que pour tout entier naturel n : $d_n = (-1)^{n+1}$.**

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $d_{n+1} = r_{n+1} - s_{n+1} = r_n + s_n - 2r_n = -r_n + s_n = -(r_n - s_n) = (-1)d_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+1} = (-1)d_n$ et (-1) est une constante donc (d_n) est géométrique de raison (-1), par conséquent , pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$d_n = d_0 \times q^n = (r_0 - s_0) \times q^n = (0-1)(-1)^n = (-1)(-1)^n = (-1)^{n+1}$$

Conclusion : $\boldsymbol{\forall n \in \mathbb{N}, d_n = (-1)^{n+1}}$.

4. **Soit (t_n) la suite définie pour tout entier naturel n par : $t_n = r_n + \frac{(-1)^n}{3}$. Montrer que la suite (t_n) est géométrique, préciser sa raison et son premier terme, en déduire t_n en fonction de n.**

$$t_0 = r_0 + \frac{(-1)^0}{3} = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$t_{n+1} = r_{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{3} = r_n + s_n + \frac{(-1)^{n+1}}{3} = r_n + r_n - (r_n - s_n) + \frac{(-1)^{n+1}}{3}$$
$$= 2r_n - d_n + \frac{(-1)^{n+1}}{3} = 2r_n - (-1)^{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{3} = 2r_n + (-1)^{n+1}\left[-1 + \frac{1}{3}\right]$$

$$= 2r_n + (-1)^{n+1} \times \left(-\frac{2}{3}\right) = 2r_n + (-1)^n \times (-1) \times \left(-\frac{2}{3}\right) = 2\left[r_n + \frac{(-1)^n}{3}\right] = 2t_n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = 2 \times t_n$ et 2 est une constante donc (t_n) est géométrique de raison 2.
On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$t_n = t_0 \times 2^n = \frac{1}{3} \times 2^n$$

Finalement :

$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{t_n} = \boldsymbol{\frac{1}{3} \times 2^n}$

5. **Déterminer r_n et s_n en fonction de n.**
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = r_n + \frac{(-1)^n}{3}$ et on a vu que $t_n = \frac{2^n}{3}$ donc $r_n = \frac{2^n}{3} - \frac{(-1)^n}{3} = \frac{2^n-(-1)^n}{3}$.
On a : $d_n = r_n - s_n$ avec $d_n = (-1)^{n+1}$ et $r_n = \frac{2^n-(-1)^n}{3}$, donc

$$s_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} - (-1)^{n+1} = \frac{2^n - (-1)^n}{3} - \frac{3(-1)^{n+1}}{3} = \frac{2^n - (-1)^n + 3(-1)^n}{3} = \frac{2^n + 2(-1)^n}{3}$$

Finalement :

$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{s_n} = \boldsymbol{\frac{2^n + 2(-1)^n}{3}}$

6. **En déduire la forme explicite de A^n en fonction de n.**
On en déduit :

$$\begin{aligned}
A^n &= \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2^n + 2(-1)^n}{3} I \\
&= \frac{1}{3}[(2^n - (-1)^n)A + (2^n + 2(-1)^n)I)] \\
&= \frac{1}{3}\left[(2^n - (-1)^n)\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} + (2^n + 2(-1)^n)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} -4(2^n - (-1)^n) & 6(2^n - (-1)^n) \\ -3(2^n - (-1)^n) & 5(2^n - (-1)^n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4(2^n - (-1)^n) + 2^n + 2(-1)^n & 6(2^n - (-1)^n) \\ -3(2^n - (-1)^n) & 5(2^n - (-1)^n) + 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^n(-4+1) + (-1)^n(4+2) & 3(2 \times 2^n - 2(-1)^n) \\ 3(-2^n - (-1)^n) & 6 \times 2^n + (-1)^n(-5+2) \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3(-2^n + 2(-1)^n) & 3(2 \times 2^n - 2(-1)^n) \\ 3(-2^n - (-1)^n) & 3(2 \times 2^n - (-1)^n) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & 2^{n+1} - 2(-1)^n \\ (-1)^n - 2^n & 2^{n+1} - (-1)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{A^n} = \boldsymbol{\begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & 2^{n+1} - 2(-1)^n \\ (-1)^n - 2^n & 2^{n+1} - (-1)^n \end{pmatrix}}$$

7. **Un élève affirme : « pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme des coefficients de A^n est égale à 2^{n+1} ».**
Si cette affirmation est fausse en donner un contre-exemple, sinon la démontrer.
La somme des coefficients de A^n est :

$$\begin{aligned}
&2(-1)^n - 2^n + 2^{n+1} - 2(-1)^n + (-1)^n - 2^n + 2^{n+1} - (-1)^n \\
&= (-1)^n(2 - 2 + 1 - 1) + 2^n(-1 + 2 - 1 + 2) \\
&= (-1)^n \times 0 + 2^n \times 2 \\
&= 2^{n+1}
\end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme des coefficients de A^n est bien égale à 2^{n+1}, **l'affirmation de cet élève est donc exacte**.